D01 **Démontrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}, 3|n^3 - n$.

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que $n^3 - n = n(n^2 - 1)$ et que le reste de la division euclidienne de n par 3 est 0, 1 ou bien 2.

Procédons par disjonction de cas :

• si $n = 3k$ alors $n(n^2 - 1) = 3k((3k)^2 - 1) = 3k(9k^2 - 1)$
Il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $n(n^2 - 1) = 3\,\alpha$, à savoir $\alpha = k(9k^2 - 1)$,
donc $3|n(n^2 - 1)$, autrement dit : $n|n^3 - n$

• si $n = 3k + 1$, alors alors :

$$\begin{aligned} n(n^2 - 1) &= (3k + 1)((3k + 1)^2 - 1) \\ &= (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 - 1) = (3k + 1)(9k^2 + 6k) \\ &= (3k + 1) \times 3(3k^2 + 2k) = 3 \times (3k + 1)(3k^2 + 2k) \end{aligned}$$

On a : $n(n^2 - 1) = 3(3k + 1)(3k^2 + 2k)$
Il existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $n(n^2 - 1) = 3\beta$, à savoir $\beta = (3k + 1)(3k^2 + 2k)$,
donc $3|n(n^2 - 1)$ autrement dit $3|n^3 - n$

• si $n = 3k + 2$, alors :
$n(n^2 - 1) = (3k + 2)((3k + 2)^2 - 1) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 - 1)$
$= (3k + 1(9k^2 + 12k + 3) = 3(3k + 2)(3k^2 + 4k + 1)$
On a : $n(n^2 - 1) = 3 \times (3k + 2)(3k^2 + 4k + 1)$
Il existe $\gamma \in \mathbb{Z}$ tel que $n(n^2 - 1) = 3\gamma$, à savoir $\gamma = (3k + 2)(3k^2 + 4k + 1)$
donc $3|n(n^2 - 1)$ autrement dit : $3|n^3 - n$.

Conclusion

Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{3|n^3 - n}$.

D02 Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} n + 1|n^2 + 5n + 4 \\ n + 1|2n + 8 \end{cases}$$

Corrigé

Une mésaventure

Analyse

On sait que pour a, b et c dans $\mathbb{Z}$ on a l'implication : $a|b \Rightarrow ac|bc$.

On a : $n + 1|n^2 + 5n + 4$ donc $(n + 1) \times 0|(n^2 + 5n + 4) \times 0$ qui s'écrit aussi $0|0$. De même, $(n + 1) \times 0|(2n + 8) \times 0$ qui s'écrit aussi $0|0$.

On a donc : $\begin{cases} n + 1|n^2 + 5n + 4 \\ n + 1|2n + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0|0 \\ 0|0 \end{cases} \Leftrightarrow 0|0$

L'analyse se termine par : $0|0$, relation vérifiée par tout entier naturel n (même pour $n \in \mathbb{Z}$ mais le sujet de l'exercice restreint l'étude à $n \in \mathbb{N}$) donc tout entier naturel est candidat !

Synthèse

… il faudrait tester un nombre infini de candidats, certain devant être finalement rejetés comme, par exemple $n = 4$: $4 + 1 = 5$, $2(4) + 8 = 16$ et non $(5|16)$.
La phase d'analyse doit être affinée.
Une combinaison linéaire malchanceuse peut aboutir à une relation de divisibilité inexploitable car amenant trop de « candidats ».

Analyse

Soit n un entier naturel tel que : $\begin{cases} n + 1|n^2 + 5n + 4 \\ n + 1|2n + 8 \end{cases}$

On a $n + 1|n^2 + 5n + 4$ et $n + 1|2n + 8$ donc $n + 1$ divise toute combinaison linéaire de $n^2 + 5n + 4$ et $2n + 8$, en particulier :

$$n + 1|2(n^2 + 5n + 4) - n(2n + 8)$$

c'est-à-dire : $n + 1|2n^2 + 10n + 8 - 2n^2 - 8n$
autrement dit : $n + 1|2n + 8$
On a : $n + 1|n + 1$ et $n + 1|2n + 8$ donc $n + 1$ divise toute combinaison linéaire de $n + 1$ et $2n + 8$, en particulier $n + 1|1(2n + 8) - 2(n + 1)$
c'est-à-dire $n + 1|6$.
Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n + 1 \geqslant 1$ et comme les diviseurs de 6 supérieurs ou égaux à 1 sont :1, 2, 3 et 6 on obtient quatre cas :

• $n + 1 = 1 \Leftrightarrow n = 0$
• $n + 1 = 2 \Leftrightarrow n = 1$
• $n + 1 = 3 \Leftrightarrow n = 2$
• $n + 1 = 6 \Leftrightarrow n = 5$

Il y a quatre candidats : 0, 1, 2 et 5.

Synthèse

• si $n = 0$ alors $n + 1 = 0 + 1 = 1$, or 1 divise tout entier relatif donc $n = 0$ est accepté ✓

• si $n=1$ alors :
$n+1=1+1=2$
$n^2+5n+4=1^2+5(1)+4=10$ et $2n+8=2(1)+8=10$
On a : $2|10$ donc $n=1$ est accepté ✓

• si $n=2$ alors :
$n+1=2+1=3$
$2^2+5(2)+4=4+10+4=18$
$2n+8=2(2)+8=12$
On a : $3|18$ et $3|12$ donc $n=2$ est accepté ✓

• si $n=5$ alors :
$n+1=5+1=6$
$n^2+5n+4=5^2+5(5)+4=25+25+4=54$
$2n+8=2(5)+8=10+8=18$
On a : $6|54$ et $6|18$ donc $n=5$ est accepté ✓

Conclusion

Les entiers naturels n tels que $\begin{cases} n+1|n^2+5n+4 \\ n+1|2n+8 \end{cases}$ sont : 0, 1, 2 et 5.

```python
for n in range(0,1000000):
    if (((2*n+8)%(n+1)==0) and (n**2+5*n+4)%(n+1)==0):
        print(n,end=" ")
```

```
Shell
>>> %Run 'défi.py'
 0 1 2 5
```

D03 Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $9x^2-4y^2=29$.

Corrigé
On a les équivalences :
$$9x^2-4y^2=29 \Leftrightarrow (3x)^2-(2y)^2=29 \Leftrightarrow (3x+2y)(3x-2y)=29$$
Donc $3x+2y$ est un diviseur de 29 et comme x et y sont positifs ou nuls, $3x+2y$ est positif ou nul, $3x-2y$ étant le diviseur associé à $3x+2y$.
Les seuls diviseurs positifs de 29 sont 1 et 29 donc deux cas seulement peuvent se présenter :

• si $3x+2y=1$, alors $3x-2y=29>3x+2y$ ce qui est impossible avec $y\geqslant 0$
• si $3x+2y=29$, alors $3x-2y=1$.
Par somme on obtient $6x=30$ donc $x=5$, puis :
$2y=29-3(5)=29-15=14$ donc $y=7$.

Conclusion
$9x^2-4y^2=29$ admet un unique couple solution dans $\mathbb{N}^2$: $(5,7)$

D04 Montrer que, $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ on a : $a+b|a^3+b^3$.

Corrigé
Rappelons l'identité remarquable : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

On peut la retrouver facilement :
$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
On a donc :
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$$
On a : $a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a^3+b^3=k(a+b)$, à savoir $k=(a+b)^2-3ab$, donc : $\boldsymbol{a+b|a^3+b^3}$.

D05 Déterminer tous les entiers naturels n tels que : $n+3|-2n+5$.

Corrigé

Analyse
On a : $n+3|-2n+5$ et $n+3|n+3$ donc $n+3$ divise toute combinaison linéaire de $(-2n+5)$ et $(n+3)$, en particulier $n+3|1(-2n+5)+2(n+3)$ c'est-à-dire : $n+3|11$, autrement dit $n+3$ est l'un des diviseurs de 11 (dans $\mathbb{Z}$).
Or, les diviseurs de 11 supérieurs ou égaux dans $\mathbb{Z}$ sont : $-11,-1,1$ et 11.
On sait que $n\in\mathbb{N}$ donc $n\geqslant 0$ autrement dit $n+3\geqslant 3$ donc $n+3$ est un diviseur de 11 supérieur ou égl à 3, d'où $n+3=11\Leftrightarrow n=8$.
Il y a un seul candidat : 8.

Synthèse

si $n = 8$, alors :

$n + 3 = 8 + 3 = 11$, $-2n + 5 = -2(8) + 5 = -16 + 5 = -11$

or $11 | -11$ donc $n = 8$ est accepté ✓

Conclusion

Le seul entier naturel n vérifiant $n + 3 | -2n + 5$ est : $\mathbf{8}$.

D06 Déterminer tous les entiers relatifs n tels que :

$$\mathbf{3n - 5 | 21n^2 - 29n - 10}$$

Corrigé

Analyse

$3n - 5 | 21n^2 - 29n - 10$ et $3n - 5 | 3n - 5$ donc $3n - 5$ divise toute

Combinaison linéaire de $21n^2 - 29n - 10$ et $3n - 7$, en particulier

$3n - 5 | 21n^2 - 29n - 10 - 7n(3n - 5)$

$3n - 5 | 21n^2 - 29n - 10 - 21n^2 + 35n$

$3n - 5 | 6n - 10$

$3n - 5 | 2(3n - 5)$ toujours vrai

Tous les entiers relatifs sont des candidats : cette information est

Inexploitable.

D'autres essais aboutissent à la même conclusion : tous les entiers relatifs

Sont des candidats.

On doit procéder autrement.

On se place dans $\mathbb{R}$: factorisons dans $\mathbb{R}$ l'expression $21x^2 - 29x - 10$.

☐ $21x^2 - 29x - 10$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 21, b = -29$

Et $c = -10$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-29)^2 - 4(21)(-10) = 1\,681 = 41$$

$\Delta > 0$ donc $21x^2 - 29x - 10$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+29 - 41}{2(21)} = \frac{-12}{42} = \frac{-6 \times 2}{6 \times 7} = -\frac{2}{7}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+29 + 41}{2(21)} = \frac{70}{42} = \frac{14 \times 5}{14 \times 3} = \frac{5}{3}$$

On a, pour tout réel x :

$$21x^2 - 29x - 10 = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{aligned}
&21x^2 - 29x - 10\\
&= 21\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right)\\
&= 7 \times 3 \times \left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right)\\
&= 7\left(x + \frac{2}{7}\right)3\left(x - \frac{5}{3}\right)\\
&= (7x + 2)(3x - 5)
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout réel x, $21x^2 - 29x - 10 = (7x + 2)(3x - 5)$. ☐

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{Z}, (7n + 2)(3n - 5) = 21n^2 - 29n - 10$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $21n^2 - 29n - 10 = k(3n - 5)$, à savoir

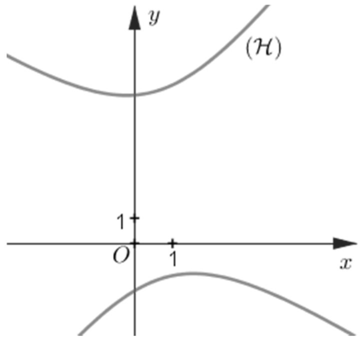
$k = 7n + 2$, donc $3n - 5 | 21n^2 - 29n - 10$.

Conclusion

tous les entiers relatifs n vérifient : $3n - 5 | 21n^2 - 29n - 10$.

D07 **Dans un repère orthogonal on note $(\mathcal{H})$ la courbe telle que, pour tous réels x et y :**

$$M(x,y) \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow 2x^2 - y^2 - 5x + 4y + xy + 11 = 0$$



1. **Déterminer les points de $(\mathcal{H})$ dont l'abscisse est 2.**

On cherche à déterminer tous les points de $(\mathcal{H})$ dont les coordonnées appartiennent toutes deux à $\mathbb{Z}$.

2. **Soient x et y deux réels, développer : $(x+y-3)(2x-y+1)$.**
3. **En déduire les points de $(\mathcal{H})$ à coordonnées entières.**

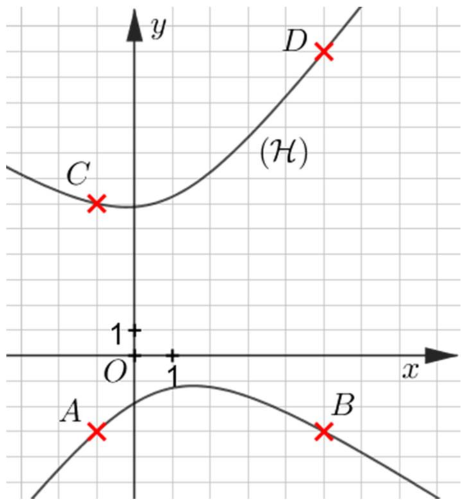
Corrigé

1. **Déterminer les points de $(\mathcal{H})$ dont l'abscisse est 2.**
   Soit $M(2;y) \in (\mathcal{H})$, on a : $2(2)^2 - y^2 - 5(2) + 4y + 2y + 11 = 0$
   c'est-à-dire : $-y^2 + 6y + 9 = 0$ dont les solutions dans $\mathbb{R}$ (non rédigé) sont $3 - 3\sqrt{2}$ et $3 + 3\sqrt{2}$. Les points de $(\mathcal{H})$ d'abscisse 2 sont donc :
   $M_1(2; 3 - 3\sqrt{2})$ et $M_2(2; 3 + 3\sqrt{3})$.
2. Développons : $(x+y-3)(2x-y+1)$
   On a :
$$\begin{aligned}&(x+y-3)(2x-y+1)\\ &= 2x^2 - xy + x + 2xy - y^2 + y - 6x + 3y - 3\\ &= 2x^2 - y^2 - 5x + 4y + xy - 3\end{aligned}$$
   Conclusion : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$(x+y-3)(2x-y+1) = 2x^2 - y^2 - 5x + 4y + xy - 3$$

3. On déduit de l'égalité obtenue en 2. que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned}&2x^2 - y^2 - 5x + 4y + xy - 3 = (x+y-3)(2x-y+1)\\ \Leftrightarrow\ &2x^2 - y^2 - 5x + 4y + xy - 3 + 14\\ &\qquad = (x+y-3)(2x-y+1) + 14\end{aligned}$$
   donc :
$$\begin{aligned}M(x;y) \in (\mathcal{H}) &\Leftrightarrow (x+y-3)(2x-y+1) + 14 = 0\\ &\Leftrightarrow (x+y-3)(2x-y+1) = -14\end{aligned}$$
   Pour x et y entiers relatif, cette égalité s'interprète par :
   « $x+y-3$ et $2x-y+1$ sont deux diviseurs de (-14) dans $\mathbb{Z}$ tel que leur produit soit égal à -14 ».
   Or les diviseurs de -14 dans $\mathbb{Z}$ sont : $-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7$ et 14.
   On s'agit donc de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes :

- $\begin{cases} x+y-3 = -14 \\ 2x-y+1 = 1 \end{cases}$
  $\Rightarrow 3x = -11\ impossible$
- $\begin{cases} x+y-3 = -2 \\ 2x-y+1 = 7 \end{cases}$
  $\Rightarrow 3x = 7\ impossible$
- $\begin{cases} x+y-3 = 1 \\ 2x-y+1 = -14 \end{cases}$
  $\Rightarrow 3x = -11\ impossible$
- $\begin{cases} x+y-3 = 7 \\ 2x-y+1 = -2 \end{cases}$
  $\Rightarrow 3x = 7\ impossible$
- $\begin{cases} x+y-3 = -7 \\ 2x-y+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y-3 = -1 \\ 2x-y+1 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y-3 = 2 \\ 2x-y+1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y-3 = 14 \\ 2x-y+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$

Conclusion
$(\mathcal{H})$ possède exactement quatre points à coordonnées entières :
$A(-1;-3)$, $B(5;-3)$, $C(-1;6)$ et $D(5;12)$.



D08 Une unité de distance étant choisie, on se donne un triangle ABC rectangle en A ayant ses trois côtés entiers : si $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ alors les trois nombres a, b et c appartiennent à $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrer que l'un au moins des trois nombres a, b, c est pair.

Corrigé

Les triangle ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$, c'est-à-dire : $c^2 + b^2 = a^2$ ou encore : $b^2 + c^2 = a^2$ $(*)$. Effectuons un raisonnement par l'absurde.
Supposons que les trois nombres a, b et c sont impairs, alors il existe trois entier naturels k, k' et k'' tels que : $a = 2k + 1$, $b = 2k' + 1$ et $c = 2k'' + 1$, puis en remplaçant dans $(*)$:

$$(2k' + 1)^2 + (2k'' + 1)^2 = (2k + 1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4k'^2 + 4k' + 1 + 4k''^2 + 4k'' + 1 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$\Leftrightarrow 1 + 1 - 1 = 4k^2 + 4k - 4k'^2 - 4k' - 4k''^2 - 4k''$$
$$\Leftrightarrow 1 = 2(2k^2 + 2k - 2k'^2 - 2k' - 2k''^2 - 2k'')$$

Cette égalité est impossible : 1, qui est un entier impair ne peut pas être égal à $2(2k^2 + 2k - 2k'^2 - 2k' - 2k''^2 - 2k'')$ qui est un entier pair.
Il faut donc rejeter la supposition que les trois nombres a, b et c sont impairs autrement dit l'**un au moins des trois nombres a, b et c est pair**.

D09 Démontrer que pour tout entier relatif n impair : $8|n^2 - 1$.

Corrigé

Soit n un entier relatif impair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors :

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

Procédons par disjonction de cas suivant la parité de k.

• si k est pair

Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2k'$, donc :

$$n^2 - 1 = 4 \times 2k' \times (2k' + 1) = 8k'(2k' + 1)$$

Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 - 1 = 8k''$, à savoir $k'' = k'(2k' + 1)$, donc $8|n^2 - 1$.

• si k est impair

Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2k' + 1$, donc :

$$n^2 - 1 = 4(2k' + 1)(2k' + 1 + 1) = 4(2k' + 1)(2k' + 2)$$
$$= 4(2k' + 1)2(k' + 1) = 8(2k' + 1)(k' + 1)$$

On a : $n^2 - 1 = 8(2k' + 1)(k' + 1)$.
Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 - 1 = 8k''$, à savoir $k'' = (2k' + 1)(k' + 1)$, donc $8|n^2 - 1$.

Conclusion

Si $n \in \mathbb{Z}$ est impair, alors $8|n^2 - 1$.

D10 Démontrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3|n^3 + 5n$.

Corrigé

Rappelons l'identité remarquable : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
On procède par disjonction de cas suivant le reste r de la division euclidienne de $n^3 + 5n$ par 3.

• **1[er] cas : $r = 0$**

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$, alors :
$n^3 + 5n = (3k)^3 + 5 \times 3k = 3^3k^3 + 3 \times 5k = 3 \times (3^2k^3 + 5k)$
Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^3 + 5n = 3k'$, à savoir $k' = 3^2k^3 + 5k$, donc $3|n^3 + 5n$

• **2[ème] cas : $r = 1$**

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$, alors :
$n^3 + 5n = (3k + 1)^3 + 5(3k + 1)$
$= (3k)^3 + 3(3k)^2 1 + 3(3k)1^2 + 1^3 + 3 \times 5k + 5$
$= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 15k + 5$
$= 27k^3 + 27k^2 + 24k + 6$
$= 3(9k^3 + 9k^2 + 8k + 2)$
$n^3 + 5n = 3(9k^3 + 9k^2 + 8k + 2)$
Il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n^3 + 5n = 3k'$, à savoir $k' = 9k^3 + 9k^2 + 8k + 2$ donc $3|n^3 + 5n$

• **3[ème] cas : $r = 2$**

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$, alors :
$n^3 + 5n = (3k + 2)^3 + 5(3k + 2)$
$= (3k)^3 + 3(3k)^2 2 + 3(3k)2^2 + 2^3 + 15k + 10$
$= 27k^3 + 3 \times 18k^2 + 36k + 8 + 15k + 10$
$= 3 \times 9k^3 + 3 \times 18k^2 + 3 \times 12k + 3 \times 5k + 18$

$= 3(9k^3 + 18k^2 + 17k + 6)$
Résumons : $n^3 + 5n = 3(9k^3 + 18k^2 + 17k + 6)$
Il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n^3 + 5n = 3k'$,
à avoir $k' = 9k^3 + 18k^2 + 17k + 6$, donc $3|n^3 + 5n$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{3}|\boldsymbol{n}^\mathbf{3} + \mathbf{5}\boldsymbol{n}$.

On pourrait même montrer que :$\forall n \in \mathbb{Z}, 3|n^3 + 5n$ par disjonction de cas suivant le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de $n^3 + 5n$ par 3.

D11 Démontrer que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$, on a : $\mathbf{4}|\boldsymbol{n}^\mathbf{4} - \boldsymbol{n}^2$.

Corrigé
On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1)$ donc il s'agit de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $4|n^2(n^2 - 1)$
On procède par disjonction de cas suivant le reste r de la division euclidienne de $n^2(n^2 - 1)$ par 4.

• 1er cas : $\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k$, alors :
$n^2(n^2 - 1) = (4k)^2((4k)^2 - 1) = 16k^2(16k^2 - 1)$
$n^2(n^2 - 1) = 4 \times 4k^2(16k^2 - 1)$
Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2(n^2 - 1) = 4k'$, $k' = 4k^2(16k^2 - 1)$
donc $4|n^2(n^2 - 1)$.

• 2ème cas : $\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 1$, alors :
$n^2(n^2 - 1)$
$= (4k + 1)^2((4k + 1)^2 - 1)$
$= (4k + 1)^2(16k^2 + 8k + 1 - 1)$
$= (4k + 1)^2(16k^2 + 8k)$
$= 4(4k + 1)^2(4k^2 + 2)$
Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2(n^2 - 1) = 4k'$, $k' = (4k + 1)^2(4k^2 + 2)$
donc $4|n^2(n^2 - 1)$.

• 3ème cas : $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}$
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 2$, alors :
$n^2(n^2 - 1)$
$= (4k + 2)^2((4k + 2)^2 - 1)$
$= (16k^2 + 16k + 4)(16k^2 + 16k + 3)$
$= 4(4k^2 + 4k + 1)(16k^2 + 16k + 3)$
Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2(n^2 - 1) = 4k'$,
à savoir $k' = (4k^2 + 4k + 1)(16k^2 + 16k + 3)$, donc $4|n^2(n^2 - 1)$.

• 4ème cas : $\boldsymbol{r} = \mathbf{3}$
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 3$, alors :
$n^2(n^2 - 1)$
$= (4k + 3)^2((4k + 3)^2 - 1)$
$= (4k + 3)^2(16k^2 + 24k + 8)$
$= 4(4k + 3)^2(4k^2 + 6k + 2)$
Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2(n^2 - 1) = 4k'$, $k' = (4k + 3)^2(4k^2 + 6k + 2)$
donc $4|n^2(n^2 - 1)$.

Conclusion
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $4|n^2(n^2 - 1)$.

Autre méthode
$n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n^2 - 1^2) = n^2(n - 1)(n + 1)$
$= (n - 1)n \times n(n + 1)$
Résumons : $n^4 - n^2 = (n - 1)n \times n(n + 1)$.
Or, on a déjà vu que le produit de deux entiers (relatifs) consécutifs est nécessairement pair donc :
• d'une part il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $(n - 1)n = 2k$
• d'autre part il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que : $n(n + 1) = 2k'$
On en déduit : $n^4 - n^2 = 2k \times 2k' = 4kk'$.
Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ telque $n^4 - n^2 = 4k''$ donc $4|n^4 - n^2$.

D12 Déterminer $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $\mathbf{2}\boldsymbol{n} + \mathbf{1}|\mathbf{3}\boldsymbol{n}^2 + \mathbf{2}$.

Corrigé
Analyse
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $2n + 1|3n^2 + 2$.
On a :
$2n + 1|3n^2 + 2$ et $2n + 1|2n + 1$donc $2n + 1$ divise toute combinaison linéaire de $3n^2 + 2$ et $2n + 1$, en particulier :
$2n + 1|2(3n^2 + 2) - 3n(2n + 1)$ c'est-à-dire :
$2n + 1|6n^2 + 4 - 6n^2 - 3n$, ou encore : $2n + 1|3n - 4$.

On a : $2n+1|3n-4$ et $2n+1|2n+1$ donc $2n+1$ divise toute combinaison linéaire de $3n-4$ et $2n+1$, en particulier :
$2n+1|2(3n-4)-3(2n+1) \Leftrightarrow 2n+1|6n-8-6n-3$
$\Leftrightarrow 2n+1|-11 \Leftrightarrow 2n+1|11$
$2n+1$ est un diviseur de 11, or les diviseurs de 11 dans $\mathbb{Z}$ sont :
$-11, -1, 1$ et 11.
Quatre cas seulement peuvent donc se présenter :

• $2n+1=-11 \Leftrightarrow 2n=-12$ $\Leftrightarrow n=-6$	• $2n+1=-1 \Leftrightarrow 2n=-2$ $\Leftrightarrow n=-1$
• $2n+1=1 \Leftrightarrow 2n=0$ $\Leftrightarrow n=0$	• $2n+1=11 \Leftrightarrow 2n=10$ $\Leftrightarrow n=5$

Il y a quatre candidats : $-6, -1, 0$ et 5.

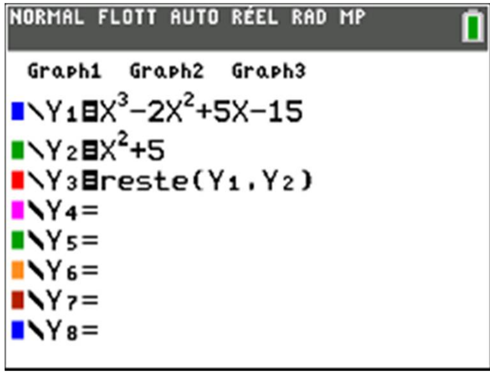
Synthèse $2n+1|3n^2+2$

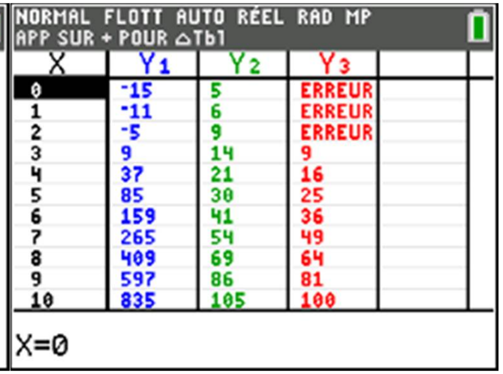
• si $n=-6$ $2n+1=2(-6)+1=-11$ $3n^2+2=3(-6)^2+2=3\times 36+2$ $=108+2=110$ $110=(-1)\times(-11)$ donc $-11|110$ $n=-6$ est accepté	• si $n=-1$ $2n+1=2(-1)+1=-1$ $-1|3n^2+2$ $n=-1$ est accepté
• si $n=0$ $2n+1=1$ $1|3n^2+2$ $n=0$ est accepté	• si $n=5$ $2n+1=2(5)+1=11$ $3n^2+2=3(5)^2+2=77$ $11|77$ $n=5$ est accepté

Conclusion
Les entiers relatifs tels que $2n+1|3n^2+2$ sont : $\mathbf{-6, -1, 0}$ **et** $\mathbf{5}$.

D13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = n^3-2n^2+5n-15$, $b_n = n^2+5$ et on note r_n le reste de la division euclidienne de a_n par b_n.
Déterminer r_n en fonction de n.

Corrigé
À l'aide de la calculatrice, on obtient :





De plus :
$-15=(-3)\times 5+0$ avec $0 \leqslant 0 < 5$ donc $r_0 = 0 = 0^2$
$-11=-12+1=(-2)\times 6+1$ avec $0 \leqslant 1 < 6$ donc $r_1 = 1 = 1^2$
$-5=-9+4=(-1)\times 9+4$ avec $0 \leqslant 4 < 9$ donc $r_2 = 4 = 2^2$
On peut donc conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = n^2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} n^3-2n^2+5n-15 &= n^3-2n^2+5n-15-n^2+n^2 \\ &= n^3-3n^2+5n-15+n^2 \\ &= (n^2+5)(n-3)+n^2 \end{aligned}$$

On a donc :

$n^3-2n^2+5n-15=(n^2+5)(n-3)+n^2$ avec $0 \leqslant n^2 < n^2+5$
qui s'écrit aussi :
$a_n = (n-3)b_n + n^2$ avec $0 \leqslant n^2 < b_n$ donc $r_n = n^2$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{r_n} = \boldsymbol{n^2}$.

Autre méthode

Posons la division euclidienne (type polynôme) de $n^3 - 2n^2 + 5n - 15$ par $n^2 + 5$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\boxed{n^3} & -2n^2 & +5n & -15 & \boxed{n^2}+5 \\
\cline{5-5}
-n^3 & & -5n & & n-2 \\
\cline{1-4}
& \boxed{-2n^2} & & -15 & \\
+ & 2n^2 & & +10 & \\
\cline{1-4}
& & & -5 &
\end{array}$$

La division euclidienne (type polynôme) donnerait un reste égal à $-5 < 0$ ce qui est impossible. Écrivons puis modifions l'égalité numérique qui en résulte du calcul précédent :

$$n^3 - 2n^2 + 5n - 15 = (n-2)(n^2+5) - 5$$
$$n^3 - 2n^2 + 5n - 15 = (n-2)(n^2+5) - (n^2+5) + n^2 + 5 - 5$$
$$n^3 - 2n^2 + 5n - 15 = (n-2-1)(n^2+5) + n^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$n^3 - 2n^2 + 5n - 15 = (n-3)(n^2+5) + n^2$ avec $0 \leqslant n^2 < n^2 + 5$

$a_n = (n-3)b_n + n^2$ avec $0 \leqslant n^2 < b_n$ donc $r_n = n^2$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{r_n} = \boldsymbol{n}^2$.

D14 Démontrer que, pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$, on a : $\boldsymbol{3 | a(a+2)(2a^2+a-1)}$.

Corrigé

Démontrons que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a(a+2)(2a^2+a-1) \equiv 0\ [3]$ en procédant par disjonction de cas suivant le reste de la division euclidienne de a par 3 :

• $\boldsymbol{a \equiv 0\ [3]}$

On a : $a(a+2)(2a^2+a-1) \equiv 0 \times 2 \times (-1) \equiv 0\ [3]$.

• $\boldsymbol{a \equiv 1\ [3]}$

On a :

$a(a+2)(2a^2+a-1) \equiv 1 \times 3 \times (2(1)^2 + 1 - 1) \equiv 1 \times 0 \times 2 \equiv 0\ [3]$

• $\boldsymbol{a \equiv 2\ [3]}$

On a :

$$a(a+2)(2a^2+a-1) \equiv 2 \times 4 \times (2(2)^2 + 2 - 1) \equiv 2 \times 1 \times 9$$
$$\equiv 2 \times (9 - 3 \times 3) \equiv 2 \times 0 \equiv 0\ [3]$$

Résumons :

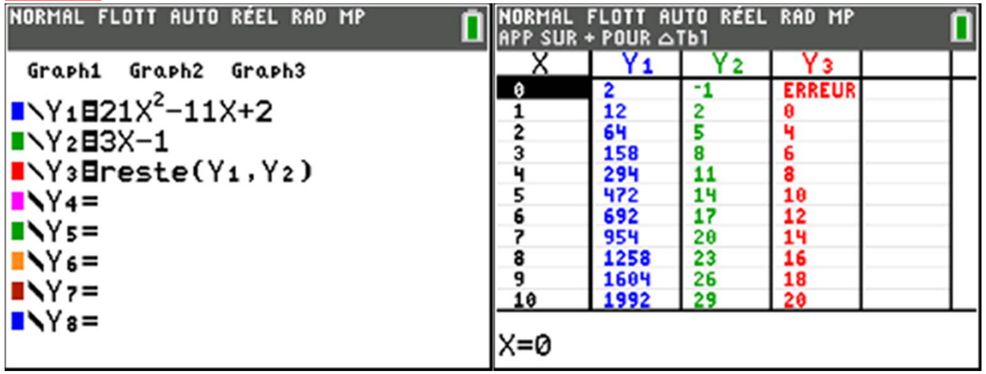
$\forall a \in \mathbb{Z}, a(a+2)(2a^2+a-1) \equiv 0\ [3]$,

autrement dit : $\boldsymbol{\forall a \in \mathbb{Z}, 3 | a(a+2)(2a^2+a-1)}$.

D15 Calculatrice autorisée

Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on pose $\boldsymbol{a_n = 21n^2 - 11n + 2}$, $\boldsymbol{b_n = 3n - 1}$ et on note $\boldsymbol{r_n}$ le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de $\boldsymbol{a_n}$ par $\boldsymbol{b_n}$. Donner $\boldsymbol{r_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ en distinguant, si cela est nécessaire, plusieurs cas.

Corrigé



On peut conjecturer que, pour $n \geqslant 2$ on a $r_n = 2n$, les cas $n = 0$ et $n = 1$ s'étudiant directement.

• si $n = 0$, $a_0 = 2$, $b_0 = -1$, on a : $-1|2$ donc $r_0 = 0$

• si $n = 1$, $a_1 = 21 - 11 + 2 = 12$, $b_1 = 3(1) - 1 = 2$, on a : $2|12$ donc $r_1 = 0$

• pour $n \geqslant 2$

$$21n^2 - 11n + 2 = 21n^2 - 11n + 2 - 2n + 2n$$
$$= 21n^2 - 13n + 2 + 2n = (3n-1)(7n-2) + 2n$$

Donc, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = (7n-2)b_n + 2n$.

Or, pour $n \geqslant 2$, $3n \geq 6$, $3n - 1 \geq 5$ donc $b_n \geqslant 0$ donc il s'agit de vérifier que $0 \leqslant 2n < b_n$:

− la première inégalité est triviale

− pour la seconde, on a : $b_n - 2n = 3n - 1 - 2n = n - 1 > 0$

donc : $b_n - 2n > 0$ autrement dit : $2n < b_n$.

Pour $n \geqslant 2$, on a : $a_n = (7n-2)b_n + 2n$ avec $0 \leqslant 2n < b_n$ donc $r_n = 2n$.

Résumons : $\boldsymbol{r_0 = r_1 = 0}$ **et pour** $\boldsymbol{n \geqslant 2, r_n = 2n}$.

D16 Démontrer que : $\mathbf{7|3^{71}+17^{26}}$.

Corrigé

On a :

$3 \equiv 3\ [7]$

$3^2 = 9 \equiv 9-7 \equiv 2\ [7]$

$3^3 = 3 \times 3^2 \equiv 3 \times 2 \equiv 6 \equiv 6-7 \equiv -1[7]$

La division euclidienne de 71 par 3 donne :

$71 = 3 \times 23 + 2$

On a :

$$3^{71} = 3^{3\times 23+2} = (3^3)^{23} \times 3^2 \equiv (-1)^{23} \times 2 \equiv -2\ [7]$$

Résumons : $3^{71} \equiv -2\ [7]$ (*)

D'autre part :

$17 \equiv 17 - 2 \times 7 \equiv 3\ [7]$

$17^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2\ [7]$

$17^3 = 17 \times 17^2 \equiv 3 \times 2 \equiv 6 \equiv 6-7 \equiv -1\ [7]$

La division euclidienne de 26 par 3 donne : $26 = 8 \times 3 + 2$.

On a : $17^{26} = 17^{8\times 3+2} = (17^3)^8 \times 17^2 \equiv (-1)^8 \times 2 \equiv 2\ [7]$.

Résumons : $17^{26} \equiv 2\ [7]$ (**)

Il résulte de $(*)$ et $(**)$ que : $3^{71} + 17^{26} \equiv -2+2 \equiv 0\ [7]$.

On a : $13^{71} + 17^{26} \equiv 0\ [7]$ autrement dit : $\mathbf{7|3^{71}+17^{26}}$.